Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS PROFESSIONS IMMOBILIÈRES • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**
2. **Contrôle de conformité et durée de vie de tubes fluorescents** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtspi.fr/assets/annales/bts-pi/E2 - Mathématiques/2022/BTS PI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction définie à partir d’une équation différentielle. L’étude porte sur cette fonction, sa courbe, la distance parcourue et son développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l’équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

On applique la formule fournie pour une équation de la forme $y' + ay = 0$: ses solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$, où C est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. En le remplaçant dans la formule, on obtient toutes les solutions sur l’intervalle demandé, sans condition initiale supplémentaire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l’équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. Comme $g(t) = 5$ est constante, sa dérivée est $g'(t) = 0$.
2. Dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

Ce résultat est égal au membre de droite de l’équation pour tout t. La fonction proposée vérifie donc bien (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1. c. Déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Une solution particulière de (E) est $g(t) = 5$, et les solutions de l’équation homogène associée sont $Ce^{-0,8t}$. Toute solution de l’équation avec second membre s’obtient en ajoutant cette solution homogène à une solution particulière. On obtient ainsi la famille complète des solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Sachant que f(0) = 20, déterminer la solution f de l’équation (E) qui vérifie cette condition initiale.

1. La solution générale trouvée précédemment s’écrit $f(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$.
2. À $t = 0$, la condition initiale donne $20 = 5 + Ce^{0} = 5 + C$, puisque $e^{0} = 1$. Donc $C = 20 - 5 = 15$.

On remplace cette constante dans la solution générale pour obtenir la fonction demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Ainsi, $e^{-0,8t}$ tend vers 0, et le produit $15e^{-0,8t}$ tend également vers 0. Dans l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, il ne reste donc à la limite que le terme constant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite obtenue que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La fonction tend vers le nombre fini 5 lorsque t tend vers $+\infty$. Par définition, la courbe représentative de f admet alors une asymptote horizontale en $+\infty$. Son ordonnée est précisément la limite de $f(t)$; on écrit cette droite avec les coordonnées usuelles du repère.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En admettant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$ pour tout t de [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$, donc f est strictement décroissante sur l'intervalle. Elle vaut 20 en 0 et tend vers 5 en $+\infty$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

La vitesse est donnée par $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Pour tout instant $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive : la vitesse est donc toujours strictement supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Elle se rapproche de cette valeur quand le temps augmente, sans l'atteindre. Le modèle ne prévoit donc pas que le chariot s'immobilise.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

1. On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, en utilisant $(e^{-0,8t})' = -0,8e^{-0,8t}$.
2. Alors $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$.

Cette expression est exactement celle de $f(t)$. Ainsi, F est bien une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

Par le théorème fondamental de l'analyse, $d = F(1) - F(0)$. En remplaçant par l'expression de F, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Cette valeur exacte est environ $15,3251$ mètres ; l'arrondi au centimètre s'effectue à deux décimales.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : choisir l'unique expression donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

La réponse exacte à recopier est la troisième proposition.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

1. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$.
2. On a $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$.

La tangente passe donc par $(0; 20)$ et son coefficient directeur est -12.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

2. Contrôle de conformité et durée de vie de tubes fluorescents

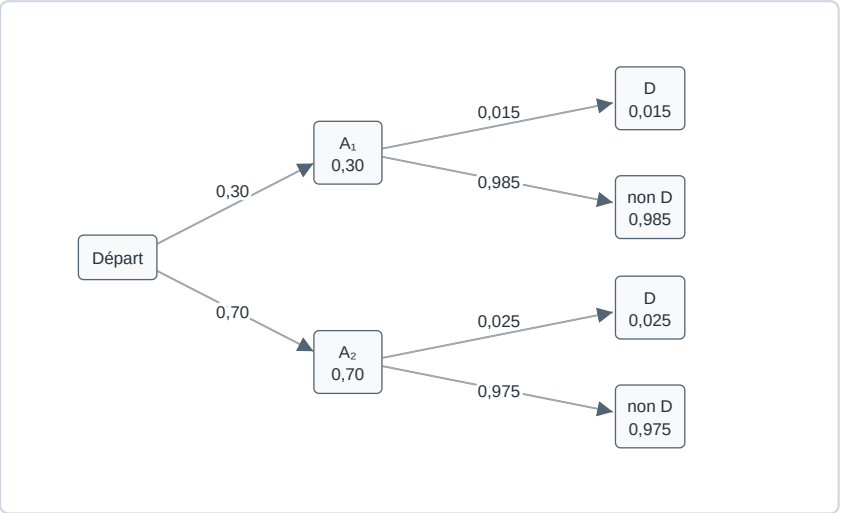
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des taux de défaut différents, et mesure leur durée de bon fonctionnement. L'exercice traite aussi de l'estimation de la proportion de rivets conformes utilisés pour fixer les tubes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, à partir des proportions de production des ateliers 1 et 2 et de leurs taux de défaut.

La première étape indique l'atelier d'origine, avec les proportions de production. La seconde indique si le tube est défectueux, avec les taux propres à chaque atelier. Les probabilités des branches issues de chaque atelier sont donc conditionnelles à cet atelier.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



A_1 : atelier 1 ; A_2 : atelier 2 ; D : tube présentant un défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : voir le schéma.

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$, où A_1 désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité que le tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut est le produit de la proportion produite dans cet atelier par son taux de défaut conditionnel : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé présente un défaut est P(D) = 0,022.**

Les événements A_1 et A_2 forment une partition de la production. La formule des probabilités totales donne $P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche $P(A_2 \mid \overline{D})$. La probabilité d'un tube provenant de l'atelier 2 et sans défaut vaut $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. De plus, $P(\overline{D}) = 1 - 0,022 = 0,978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825/0,978 \approx 0,698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.**

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,001$, l'espérance est $E(T) = 1/\lambda = 1/0,001 = 1\,000$ heures. Elle représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes fluorescents.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures, durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

Pour une loi exponentielle, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec $\lambda = 0,001$ et $t = 8\,000$, on obtient $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,9997$. Arrondie au centième, cette probabilité vaut 1,00.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1,00$.

Question 3. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser 10 000 heures est la probabilité complémentaire de ne pas dépasser cette durée : $P(T > 10\,000) = e^{-\lambda \times 10\,000}$. Avec $\lambda = 0,001$, elle vaut $e^{-10} \approx 0,0000454$, soit 0,00 au centième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0,00$ au centième près.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon aléatoire de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée des rivets conformes dans l'échantillon : $f = 975/1\,000 = 0,975$. Cette fréquence estime la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Estimation ponctuelle : $f = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p de rivets conformes, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

Avec $f = 0,975$ et $n = 1\,000$, la marge donnée par la formule est $1,96\sqrt{f(1-f)/n} \approx 0,009677$. L'intervalle centré sur f est donc $[0,975 - 0,009677\ ;\ 0,975 + 0,009677]$, soit, aux 10^{-3} près, $[0,965\ ;\ 0,985]$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, Session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de 2 heures, coefficient 2 sauf pour la spécialité Traitement des matériaux, coefficient 3. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et la production de tubes fluorescents, ainsi que la conformité de rivets. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, analyse, intégration, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; pour une équation avec second membre, ajouter une solution particulière.
- Pour $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, la limite en $+\infty$ vaut 5 et l'asymptote horizontale est $y = 5$.
- Pour T de loi exponentielle de paramètre λ, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $E(T) = 1/\lambda$.
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est $f \pm 1,96\sqrt{(f(1 - f)/n)}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale $f(0) = 20$ pour déterminer la solution de l'équation différentielle.
- Justifier les variations avec le signe de f' et indiquer les limites dans un tableau lisible.
- Distinguer $P(A_1 \cap D)$ des probabilités conditionnelles et identifier clairement les événements.
- Respecter les unités et les arrondis demandés, puis interpréter les résultats dans leur contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle avec un second membre constant ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on trouve une solution particulière. Ici, la constante 5 convient à $y' + 0,8y = 4$. Toute solution est la somme de cette solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

Q : Comment savoir si le chariot s'arrête selon le modèle ?

Il faut vérifier si la vitesse atteint zéro à un instant fini. Ici, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ reste supérieure à 5 et tend vers 5. Selon ce modèle, la vitesse ne s'annule donc pas et le chariot ne s'arrête pas.

Q : Comment calculer les probabilités demandées pour la durée de vie ?

Pour une loi exponentielle, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. La probabilité d'une durée supérieure à t est son complément, $e^{-\lambda t}$. Remplacez t et λ par les valeurs de l'énoncé, puis arrondissez au centième.

Q : Comment établir l'intervalle de confiance des rivets conformes ?

Prenez la fréquence $f = 975/1000$ et $n = 1000$. Appliquez la formule fournie, avec les bornes $f - 1,96\sqrt{(f(1 - f)/n)}$ et $f + 1,96\sqrt{(f(1 - f)/n)}$, puis arrondissez chaque borne à 10^{-3} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtspi.fr/assets/annales/bts-pi/E2 - Mathématiques/2022/BTS PI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Professions Immobilières : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.