Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS PROFESSIONS IMMOBILIÈRES • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage** (12 questions) — **Page 3**
2. **Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtspi.fr/assets/annales/bts-pi/E2 - Mathématiques/2022/BTS PI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine commence à freiner à 20 m/s et sa vitesse f(t) est modélisée par une équation différentielle, puis par une fonction exponentielle. Les questions portent sur sa solution, son évolution, la distance parcourue et l'étude locale de la fonction.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

L'équation homogène s'écrit $y' = -0,8y$. D'après la formule donnée pour $y' + ay = 0$, ses solutions sont de la forme ke^{-at}. Ici, $a = 0,8$. La constante k peut prendre toute valeur réelle, ce qui décrit l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En substituant $g(t) = 5$ dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité est vraie pour tout t de l'intervalle considéré. La fonction vérifie donc bien l'équation différentielle complète.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

On connaît une solution particulière de (E), la fonction constante $g(t) = 5$. L'ensemble des solutions de l'équation complète s'obtient en ajoutant à cette solution une solution de l'équation homogène associée. D'après la question 1.a, le terme ajouté est une exponentielle de la forme $ke^{-0,8t}$, où k est réel.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale de (E) est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À l'instant initial, $t = 0$, la condition impose $20 = f(0) = 5 + k$, car $e^0 = 1$. On en déduit la constante k, puis on la remplace dans la solution générale pour obtenir la fonction correspondant à la vitesse du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

La fonction est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le produit $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Or l'exponentielle tend vers 0 lorsque son exposant tend vers $-\infty$. Ainsi, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers 0 et la limite de $f(t)$ est le terme constant restant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite obtenue à la question précédente est finie. Par définition, si une fonction tend vers une valeur L lorsque t tend vers $+\infty$, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$ en $+\infty$. Ici, la courbe C se rapproche donc de la droite horizontale de niveau 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À l'aide de l'expression donnée de f', dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle : f est strictement décroissante. Elle commence à $f(0) = 20$ et tend vers 5.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	−	
Variation de f	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse devrait atteindre 0. Or l'expression de la vitesse permet de vérifier les deux faits suivants :

- Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$.
- Quand t tend vers $+\infty$, la vitesse tend vers 5, et non vers 0.

Le chariot ralentit, mais ne s'arrête pas selon ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m/s}$, sans atteindre 0.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive les deux termes de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Pour le terme exponentiel, la dérivation de l'exposant apporte le facteur $-0,8$: $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Après simplification, on retrouve exactement l'expression de $f(t)$. La fonction F est donc une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Question 4.b. **À l'aide de l'intégrale de f entre les instants t0 = 0 et t1 = 1, calculer la valeur exacte de la distance parcourue, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1, donc $d = F(1) - F(0)$. Avec la primitive donnée, $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$. La soustraction donne $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$, soit environ $15,3251$ m. Au centimètre près, on arrondit à deux décimales.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions du sujet, recopier celle qui donne le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc choisir la troisième proposition, où $\frac{24}{5}$ est aussi écrit sous la forme décimale $4,8$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On lit $f(0) = 20$ dans la condition initiale. Avec $f'(t) = -12e^{-0,8t}$, on obtient $f'(0) = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et son coefficient directeur vaut -12.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

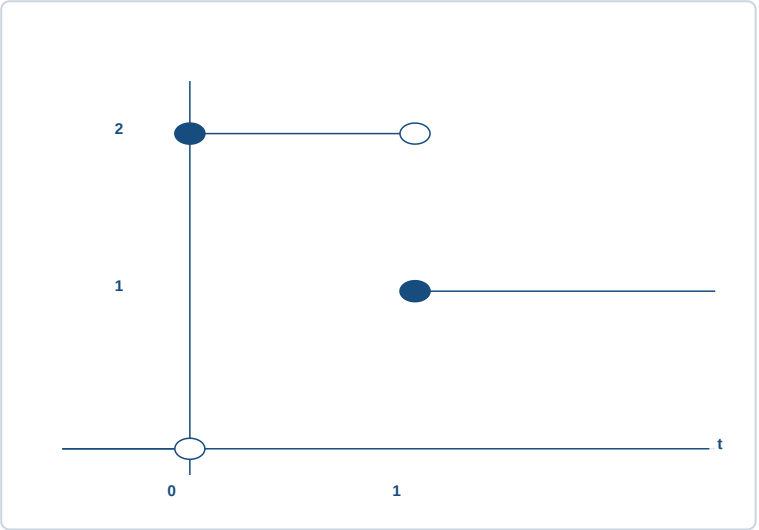
Un système électrique entrée-sortie, de fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1), reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1). L'exercice demande de tracer le signal d'entrée, de déterminer la sortie par transformées de Laplace, puis d'étudier et de représenter cette sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction e(t).

La causalité donne e(t)=0 pour t<0. Pour 0≤t<1, U(t)=1 et U(t−1)=0, donc e(t)=2. À partir de t=1, les deux échelons valent 1, donc e(t)=1. Sur le tracé, le point (0;0) est ouvert et (0;2) fermé. À t=1, le point (1;2) est ouvert et (1;1) fermé. Ces points distinguent les valeurs du signal aux deux instants de saut.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

e(t)=0 pour t<0, 2 pour 0≤t<1 et 1 pour t≥1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité, la transformée de 2U(t) est deux fois celle de U(t). Le formulaire donne respectivement 1/p et e^{-p}/p pour U(t) et U(t−1). On transforme donc séparément les deux termes de e(t)=2U(t)−U(t−1), puis on les soustrait. Le facteur e^{-p} correspond au retard d’une unité du second échelon. On obtient ainsi la transformée du signal d’entrée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer l'expression de S(p) donnée dans le sujet : S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^(-p)/[p(p + 1)].

La relation du système est S(p)=H(p)E(p). En remplaçant H(p) par 1/(p+1) et E(p) par $(2-e^{-p})/p$, on multiplie ces deux expressions. La mise au même dénominateur donne alors la somme des deux termes demandés. Le facteur e^{-p} reste associé au terme retardé.

$$S(p) = \frac{1}{p+1} \times \frac{2 - e^{-p}}{p} = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier la décomposition en éléments simples 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On réduit les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Le numérateur devient (p+1)−p=1, et le dénominateur commun est p(p+1). L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les fractions sont définies. Cette décomposition permet de retrouver séparément les transformées inverses des deux termes.

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), e^(-p)/p et e^(-p)/(p + 1).

Les deux premières transformées inverses se lisent directement dans le formulaire. Pour les deux dernières, la propriété de translation indique qu'un facteur e^{-p} décale la fonction d'une unité et la multiplie par U(t−1). On applique cette règle à U(t) puis à e^{-t}U(t). Les inverses demandées, dans l'ordre, sont :

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Pour 0≤t<1, les fonctions retardées contenant U(t−1) sont nulles. Seul le premier terme contribue : son inverse est $2U(t) - 2e^{-t}U(t)$. Sur l'intervalle demandé, U(t)=1, ce qui donne l'expression de la sortie.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. À partir de l'expression admise de s(t) sur [1 ; +∞[, calculer s(1), en donnant sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

On remplace t par 1 dans l'expression admise pour t≥1 : $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. En simplifiant, $s(1) = 2 - 2/e$. Avec e≈2,71828, on obtient 1,26424…, qui s'arrondit au dixième à 1,3. Cette valeur coïncide avec la limite à gauche issue de l'expression sur [0;1[.

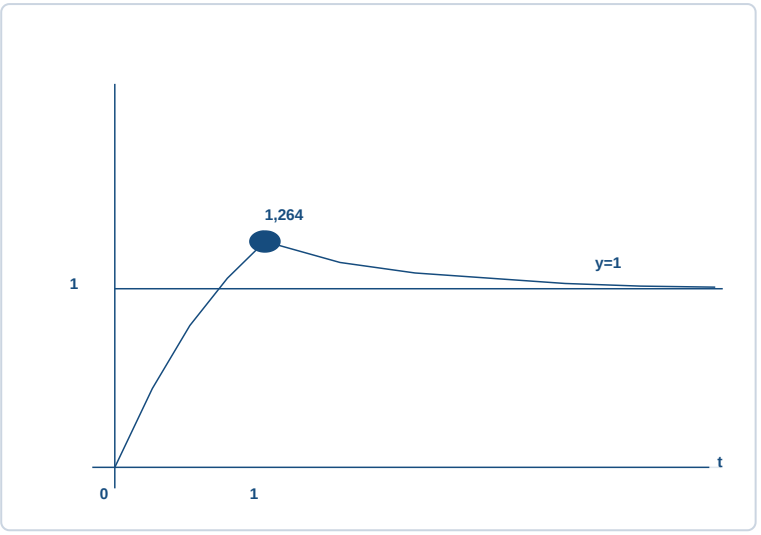
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. Compléter sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction s.

Sur [0;1[, la courbe suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ et croît de 0 à $2 - 2/e \approx 1,264$. Pour t≥1, elle suit $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Comme e−2 est positif, cette branche décroît et se rapproche de 1 par valeurs supérieures. Les deux expressions donnent la même valeur en t=1 : le raccord est continu. Le dessin représente ces deux branches et l'asymptote horizontale.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe passant par (0;0) et (1;1,264), puis décroissante vers l'asymptote $y = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour t≥1, l'expression donnée est $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers +∞, e^{-t} tend vers 0. Le coefficient e−2 étant constant, le produit $(e-2)e^{-t}$ tend également vers 0. Il reste le terme constant, qui est donc la limite de s(t). La courbe se rapproche de la droite horizontale d'équation y=1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, au moyen d'équations différentielles, d'intégrales, d'un développement limité et des transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = 0, les solutions sont y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière complète la solution générale d'une équation avec second membre.
- Si f(t) tend vers une limite finie L en +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle, soit F(t1) - F(t0) pour une primitive F.
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est F(p)e^(-ap), selon la propriété de translation temporelle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour une solution particulière constante, substituer cette constante dans l'équation différentielle et vérifier l'égalité.
- Dans un tableau de variation, établir le signe de la dérivée et faire apparaître les valeurs aux bornes et les limites.
- Pour une distance, indiquer les bornes de l'intégrale et calculer la différence de primitive dans le bon ordre.
- En transformées de Laplace, distinguer le décalage temporel et le facteur exponentiel e^(-ap), puis respecter les intervalles demandés.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle avec une condition initiale ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on ajoute une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale permet ensuite de déterminer la constante de la solution générale.

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la vitesse ?

On intègre la vitesse entre les deux instants. Avec une primitive F de f, la distance s'obtient par F(t1) - F(t0), puis s'exprime en mètres avec l'arrondi demandé.

Q : Comment organiser les deux heures pour traiter les exercices ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de l'exercice 1 sont indépendantes. Traitez les questions accessibles, réservez du temps aux tracés et vérifiez les unités et les arrondis.

Q : Quels éléments vérifier pour les tracés et les réponses numériques ?

Respectez les données, les intervalles et les points remarquables déduits des expressions fournies. Présentez les valeurs exactes puis les arrondis demandés, et indiquez clairement les unités lorsqu'elles sont pertinentes.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtspi.fr/assets/annales/bts-pi/E2 - Mathématiques/2022/BTS PI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Professions Immobilières : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.