Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS PROFESSIONS IMMOBILIÈRES • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtspi.fr/assets/annales/bts-pi/E2 - Mathématiques/2023/BTS PI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction f du temps, avec une position initiale de 20 cm et une vitesse initiale négative. L'exercice étudie l'équation différentielle du mouvement, les variations et l'approximation numérique de f, puis la tangente et le développement limité de sa courbe.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On calcule le discriminant du trinôme : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Les deux racines sont donc $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$. On peut aussi reconnaître la factorisation $r^2 + 5r + 4 = (r+1)(r+4)$. Les deux méthodes donnent les mêmes solutions réelles distinctes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions de l'équation caractéristique sont $r = -1$ et $r = -4$.

Question 1.b. À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines, trouvées à la question précédente, sont réelles et distinctes : -1 et -4. Le tableau fourni indique alors que toute solution est une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces deux racines. Les constantes sont réelles.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution générale est $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position et de la vitesse initiales du point M, déterminer f(0) et f'(0).

La fonction f représente la distance OM, en centimètres. À l'instant initial, le point M se trouve à 20 cm de O, donc cette donnée donne directement la valeur de $f(0)$. La vitesse instantanée est la dérivée de la distance par rapport au temps ; son signe négatif indique que la distance diminue.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À l'instant initial, $f(0) = 20$ cm et la vitesse vaut $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. En utilisant l'expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

La distance exacte au bout de deux secondes s'obtient en remplaçant t par 2 dans l'expression donnée. Ainsi, $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}$. On simplifie l'exposant du second terme en -8. La réponse exacte reste exprimée avec les exponentielles et s'exprime en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La distance exacte après deux secondes est $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de quatre secondes, et justifier.

On évalue la distance à $t = 4$: $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm. Cette valeur est strictement inférieure à 0,5 cm. Comme f est continue, elle passe sous ce seuil avant 4 secondes. Le tiroir est donc fermé à un instant inférieur à quatre secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le constructeur a raison : la distance devient inférieure à 0,5 cm avant l'instant $t = 4$ s.

Partie B : Étude de fonction

Question 1.a. En utilisant la limite donnée de e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent aussi vers $+\infty$. Par la limite rappelée dans l'énoncé, chacun des termes exponentiels tend vers zéro. La différence de ces deux termes tend donc également vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite de la distance lorsque le temps tend vers l'infini est $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et vaut zéro. La courbe représentative de f se rapproche donc de la droite horizontale d'ordonnée zéro lorsque l'abscisse augmente indéfiniment. Cette droite est une asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe admet en $+\infty$ l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive séparément les deux termes de f. La dérivée de e^{-t} est $-e^{-t}$, et celle de e^{-4t} est $-4e^{-4t}$, par la règle de dérivation d'une composée. En tenant compte du signe moins devant le second terme, on obtient l'expression suivante pour tout $t \in [0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	$-$
Variation de f	20	0

La fonction est strictement décroissante sur l'intervalle indiqué. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, f décroît strictement de 20 vers sa limite 0.

Question 3.a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant si nécessaire des lignes jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de f(t), arrondies au centième, et le résultat de la condition pour chaque ligne.**

La condition de la boucle compare précisément $f(t)$ à 0,5. Elle reste vraie pour les lignes 36 à 38, puis devient fausse à la ligne 39 : l'algorithme s'arrête alors. Les valeurs ci-dessous sont arrondies au centième, conformément au tableau de l'énoncé.

Ligne	t **(s)**	$f(t)$ **(cm)**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété

ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	....	....
ligne numéro 37	3,7	....	....
ligne numéro 38	3,8	....	....

3,6 : 0,64 : VRAIE

3,7 : 0,58 : VRAIE

3,8 : 0,52 : VRAIE

3,9 : 0,47 : FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour laquelle la condition est fausse.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À la ligne 38, la condition est encore vraie, car $f(3{,}8) \approx 0{,}52 > 0{,}5$. La boucle augmente alors t de 0,1 seconde. À $t = 3{,}9$, la distance vaut environ 0,47 cm : elle est inférieure au seuil, et la condition devient fausse. La boucle se termine à cette valeur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À la fin de l'algorithme, $t = 3{,}9$ s : la distance est sous le seuil, le tiroir est fermé.

Question 4.a. À partir du développement limité fourni par le logiciel, déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.

Le logiciel fournit la partie régulière du développement limité : $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + o(t^2)$. La tangente au point d'abscisse zéro est déterminée par les termes de degré zéro et de degré un. Son ordonnée à l'origine est donc 20 et son coefficient directeur est -10. On écrit son équation sous la forme affine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'équation de la tangente au point d'abscisse zéro est T : $y = 20 - 10t$.

Question 4.b. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité à l'ordre deux : $20 - 10t - 15t^2$. Parmi les propositions, il faut choisir celle qui ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Le reste est donc négligeable devant t^2, et non simplement devant une constante.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La bonne proposition est $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4.c. Indiquer si, au voisinage de zéro, la courbe représentative de f est au-dessus ou en dessous de sa tangente T. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente a pour équation $T(t) = 20 - 10t$. Le développement limité donne alors $f(t) - T(t) = t^2(-15 + \varepsilon(t))$, où $\varepsilon(t) \to 0$. Au voisinage de zéro, le facteur $-15 + \varepsilon(t)$ est négatif, tandis que t^2 est positif pour $t \neq 0$. La différence est donc négative.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Au voisinage de zéro, la courbe représentative de f est en dessous de sa tangente T.

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance

Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques pour favoriser les ventes, puis étudie la durée de réparation des vélos. Il estime également la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme à partir d'un échantillon de 90 clients.

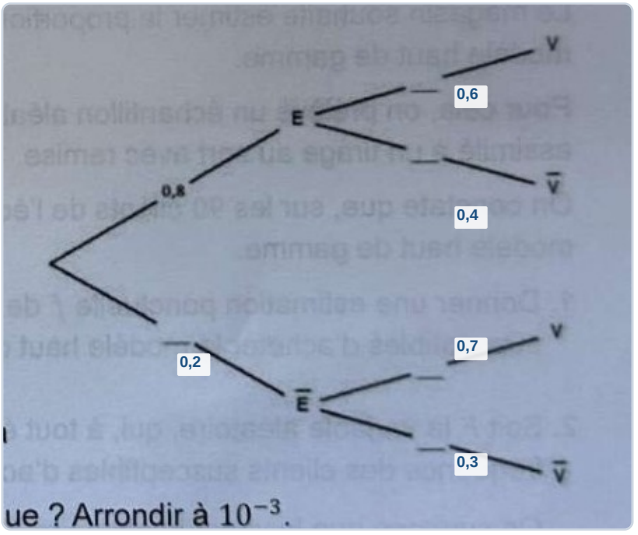
Partie A : Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, vente ou absence de vente, à partir des données fournies.

Les branches issues d'un même nœud sont complémentaires : leurs probabilités totalisent 1. Les probabilités de vente dépendent du type de vélo prêté.

Branche	Probabilité
Électrique	0,8
Mécanique	0,2
Vente sachant électrique	0,6
Pas de vente sachant électrique	0,4
Vente sachant mécanique	0,7
Pas de vente sachant mécanique	0,3

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : 0,8 et 0,2 ; puis 0,6 et 0,4 ; puis 0,7 et 0,3.

Question 2. **Déterminer la probabilité P(E ∩ V) qu'un vélo prêté choisi au hasard soit électrique et que le prêt débouche sur une vente.**

La probabilité d'obtenir la branche « électrique puis vente » est le produit de la probabilité de choisir un vélo électrique par la probabilité d'une vente sachant que le vélo est électrique : $P(E \cap V) = P(E)P(V \mid E)$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(E \cap V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48.$

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Les deux types de vélos couvrent tous les cas. On additionne donc les probabilités des branches qui aboutissent à une vente : $P(V) = P(E \cap V) + P(\overline{E} \cap V) = 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,7$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62.$

Question 4. **Sachant que le prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité que le vélo prêté soit électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

La probabilité recherchée est une probabilité conditionnelle : on divise la probabilité d'avoir un vélo électrique et une vente par la probabilité totale d'une vente. On arrondit ensuite au millième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(E \mid V) = \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,774.$

Partie B : Loi binomiale

Question 1. **On admet que X, le nombre de vélos parmi 80 dont la réparation nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre, suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.**

Il y a 80 réparations, et la probabilité qu'une réparation nécessite moins d'une heure est 0,62. Le nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres 80 et 0,62.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62).$

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Avec une loi binomiale de paramètres 80 et 0,62, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est $\binom{80}{40}(0,62)^{40}(0,38)^{40}$. On arrondit au millième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. **Déterminer la probabilité que le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.**

Le nombre de vélos dont la réparation nécessite plus d'une heure est le complément de X. L'inégalité demandée devient $X > 80 - X$, soit $X \geq 41$. La probabilité cherchée est donc $1 - P(X \leq 40)$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(X \geq 41) \approx 0,981$.

Partie C : Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner l'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.**

L'estimation ponctuelle de la proportion est la fréquence observée dans l'échantillon : on divise le nombre de clients susceptibles d'acheter le modèle par l'effectif total interrogé.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f = \dfrac{54}{90} = 0,6$, soit 60 %.

Question 2.a. **En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p.**

La formule fournie donne $f \pm 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}$. Avec $f = 0,6$ et $n = 90$, la marge vaut environ 0,1012. Les bornes sont donc environ 0,4988 et 0,7012.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2.b. Dire si l'on est certain que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance obtenu.

Un intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas que la proportion inconnue s'y trouve. Le niveau de 95 % concerne la méthode : sur des échantillonnages répétés, environ 95 % des intervalles construits contiendraient la vraie proportion.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on n'est pas certain que p appartienne à cet intervalle.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS PROFESSIONS IMMOBILIÈRES

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux, coefficient 3. Deux exercices de dix points étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis un magasin de vélos par probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$ détermine les racines et les exponentielles de la solution générale.
- Pour $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, $f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, donc la courbe admet l'asymptote $y = 0$.
- Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, X compte les succès de n essais indépendants ayant chacun la même probabilité p.
- L'intervalle de confiance fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$, où f est la fréquence observée et n l'effectif de l'échantillon.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la position initiale $f(0)$ de la vitesse initiale $f'(0)$, négative lorsque le tiroir se rapproche du meuble.
- Dans l'arbre, placer les probabilités conditionnelles sur les branches et multiplier les probabilités le long d'un chemin.
- Traduire correctement la comparaison des nombres de réparations en moins d'une heure et de plus d'une heure avant le calcul binomial.
- Donner les bornes et l'interprétation de l'intervalle de confiance sans affirmer que la valeur inconnue y appartient avec certitude.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent les exponentielles de la solution générale. Utilisez ensuite les valeurs initiales de la position et de la vitesse pour déterminer les constantes.

Q : Comment traduire la comparaison des durées de réparation dans la question binomiale ?

Si X désigne le nombre de réparations de moins d'une heure parmi 80 vélos, le nombre de réparations de plus d'une heure est 80 - X. La condition demandée équivaut donc à $X > 80 - X$, soit $X > 40$.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de l'exercice 2 peuvent être traitées indépendamment. Avancez sur les questions accessibles, puis gardez du temps pour vérifier les calculs, les arrondis et les réponses contextualisées.

Q : Un intervalle de confiance à 95 % garantit-il que p appartient à l'intervalle ?

Non. L'intervalle est calculé à partir de la fréquence observée selon la formule fournie. Le niveau de confiance de 95 % décrit la fiabilité de la méthode de construction, et non une certitude d'appartenance pour cette valeur particulière de p.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtspi.fr/assets/annales/bts-pi/E2 - Mathématiques/2023/BTS PI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Professions Immobilières : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.