Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS PROFESSIONS IMMOBILIÈRES • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

# Mathématiques - BTS, Groupement B

**Session 2023** • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement


1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) — **Page 3**

2. **Séries de Fourier d'une fonction paire périodique** (10 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**


**Sujet officiel (PDF) :** https://coursbtspi.fr/assets/annales/bts-pi/E2 - Mathématiques/2023/BTS PI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

# 1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d'un tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, puis examine ses variations, un algorithme de seuil et la position moyenne du tiroir.

## Partie A - Résolution d'une équation différentielle

**Question 1.a.** **Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Les racines sont $\frac{-5-3}{2}$ et $\frac{-5+3}{2}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -4$ ou $r = -1$.

**Question 1.b.** **Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en utilisant le tableau fourni.**

Les deux racines réelles distinctes étant $-4$ et $-1$, le tableau fourni donne la solution générale comme combinaison des exponentielles correspondantes : $y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

## Partie A - Conditions initiales

**Question 2.a.** **À partir de la situation à l'instant t = 0, déterminer f(0) et f'(0), en tenant compte de la distance initiale et de la vitesse négative du tiroir.**

À l'instant initial, la distance est de 20 cm. La vitesse étant négative et égale à $-10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$, on obtient directement la valeur de la fonction et celle de sa dérivée en zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20\ \mathrm{cm}$ et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

**Question 2.b.** **En utilisant l'expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On remplace $t$ par 2 dans l'expression admise : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. La distance exacte est cette expression, soit environ 3,157 cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

---

**Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

La fonction est décroissante et $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm, valeur inférieure à 0,5 cm. Le seuil est donc atteint avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : le tiroir est fermé avant 4 s, car $f(4) \approx 0,427 \text{ cm} < 0,5 \text{ cm}$.

---

## Partie B - Étude de fonction

**Question 1.a. Sachant que la limite de $e^{-u}$ lorsque u tend vers +∞ vaut 0, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, chacune des exponentielles tend vers zéro. Leur combinaison tend donc également vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

---

**Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, puis en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant nulle, la courbe se rapproche de l'axe des abscisses. Celui-ci est donc une asymptote horizontale à la courbe.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

---

**Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme en appliquant $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, $\left(\frac{70}{3}e^{-t}\right)' = -\frac{70}{3}e^{-t}$ et $\left(-\frac{10}{3}e^{-4t}\right)' = \frac{40}{3}e^{-4t}$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

---

**Question 2.b.** **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

On a $f(0) = 20$, $f'(t) < 0$ sur l'intervalle et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Le tableau de variations est donc :

| $t$ | **0** | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $f'(t)$ | $-$ | |
| Variation de $f$ | 20 | $\searrow$ 0 |

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f$ est strictement décroissante de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

---

**Question 3.a.** **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de t, de f(t) arrondies à $10^{-2}$ et la véracité de la condition.**

La condition testée est $f(t) > 0,5$. Les valeurs de $f(t)$ sont arrondies au centième, et la première ligne où la condition est fausse arrête la boucle.

| **Ligne** | $t$ | $f(t)$**, au centième** | **Condition** |
|---|---|---|---|
| 36 | 3,6 | 0,64 | VRAIE |
| 37 | 3,7 | 0,58 | VRAIE |
| 38 | 3,8 | 0,52 | VRAIE |
| 39 | 3,9 | 0,47 | FAUSSE |

La ligne 39 est donc la dernière valeur testée par l'algorithme.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

L'algorithme s'arrête pour $t = 3,9$.

---

**Question 3.b.** **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.**

La condition devient fausse à $t = 3,9$ : à cette étape, la distance vaut environ 0,47 cm, donc elle est inférieure au seuil de fermeture de 0,5 cm. L'algorithme teste le temps par pas de 0,1 s ; il situe ainsi la fermeture au plus tard à 3,9 s.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Fermeture atteinte au plus tard à $3,9\ \text{s}$, selon le pas de calcul de $0,1\ \text{s}$.

**Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t) dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.**

Une primitive de $f$ est $-\frac{70}{3}e^{-t}+\frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi,

$$m=\frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t}+\frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4=\frac{35}{6}(1-e^{-4})-\frac{5}{24}(1-e^{-16}).$$

Comme $\frac{35}{6}-\frac{5}{24}=\frac{45}{8}$, on obtient l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$m=\frac{45}{8}-\frac{35}{6}e^{-4}+\frac{5}{24}e^{-16}.$$

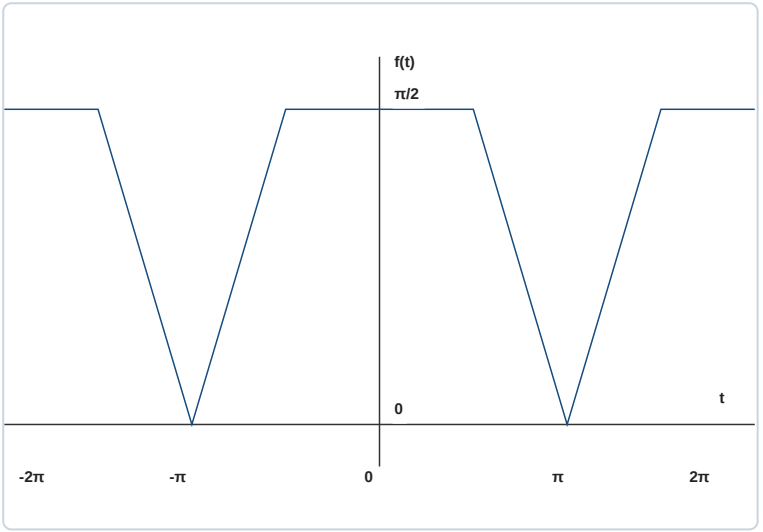
## 2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice porte sur une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. Il mobilise le tracé de la fonction, le calcul de ses coefficients de Fourier et l'étude d'une somme partielle pour approximer le carré de sa valeur efficace.

**Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [−2π ; 2π], en utilisant sa définition par morceaux et sa périodicité.**

La période vaut $2\pi$, et $f$ est paire. Sur chaque période, le tracé est constant à $\pi/2$ jusqu'à la distance $\pi/2$ d'un multiple impair de $\pi$, puis il rejoint 0 linéairement à ce multiple. Le tracé ci-dessous représente ainsi la fonction sur tout l'intervalle demandé.

Tracé de f sur [-2π ; 2π]




✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé de $f$ sur $[-2\pi; 2\pi]$ : voir la représentation.

**Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier $b_n$ est nul.**

Le formulaire donne $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$. Comme l'intégrande est périodique de période $T = 2\pi$, on peut intégrer sur $[-\pi; \pi]$. La fonction $f$ est paire et $\sin(nt)$ est impaire, donc leur produit est impair. Son intégrale sur cet intervalle symétrique est nulle, d'où le résultat pour tout $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

**Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

La pulsation associée à une fonction de période $T$ est $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ici, l'énoncé donne $T = 2\pi$. En remplaçant cette période dans la formule, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La pulsation est exprimée en radians par unité de temps.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

**Question 4. Démontrer que le coefficient $a_0$ est égal à $3\pi/8$.**

D'après le formulaire, pour une fonction paire de période $2\pi$, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, l'aire est celle d'un rectangle de hauteur $\pi/2$, soit $\pi^2/4$. Sur $[\pi/2;\pi]$, l'aire est celle d'un triangle de base et de hauteur $\pi/2$, soit $\pi^2/8$. Ainsi, $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

**Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{(\pi/2)} \cos(nt)\,dt + (2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$.**

La fonction étant paire et de période $2\pi$, le formulaire donne $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale aux deux expressions de $f$ : elle vaut $\pi/2$ sur $[0;\pi/2]$, puis $\pi - t$ sur $[\pi/2;\pi]$. En distribuant le facteur $2/\pi$, le premier terme devient exactement $\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt$.

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

**Question 6. En utilisant l'expression admise de $a_n$, déterminer les valeurs exactes de $a_1$, $a_2$ et $a_3$.**

On utilise l'expression admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1$, les cosinus valent 0 et $-1$, donc $a_1 = 2/\pi$. Pour $n = 2$, ils valent $-1$ et 1, donc $a_2 = -1/\pi$. Pour $n = 3$, ils valent 0 et $-1$, donc $a_3 = 2/(9\pi)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

**Question 7. Déduire des coefficients obtenus l'expression de la somme partielle $s_3(t)$.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients sinus sont nuls d'après la question 2. En remplaçant $a_0, a_1, a_2, a_3$ par leurs valeurs, on obtient directement l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

---

**Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction $s_3$.**

La somme partielle est paire et présente des maxima près des multiples de $2\pi$, avec des creux près des multiples impairs de $\pi$. Parmi les trois représentations proposées, cette allure correspond à la courbe numéro 3.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

---

**Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à $10^{-4}$.**

On remplace les coefficients par leurs valeurs exactes dans $P = (a_0)^2 + \frac{1}{2}[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$. Ainsi, $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{81\pi^2}\right)$. L'arrondi à $10^{-4}$ est $1{,}6437$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437$.

---

**Question 9.b. Sachant que F est la valeur efficace de f, que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de $F^2$, choisir le pourcentage d'erreur correspondant parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.**

La réponse attendue est le choix correspondant à l'écart relatif entre $P$ et $F^2 = \pi^2/6$. L'erreur est d'environ $0{,}074\,\%$, ce qui correspond à l'option $0{,}1\,\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$0{,}1\,\%$.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

**Bilan de l'épreuve :** Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis une fonction périodique par séries de Fourier et approximation de valeur efficace.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour ay'' + by' + cy = 0, les racines de $ar^2 + br + c = 0$ déterminent la forme de la solution générale.
- Si f'(t) < 0 sur un intervalle, alors f est strictement décroissante sur cet intervalle.
- La pulsation d'une fonction périodique de période T vaut $\omega = 2\pi/T$.
- Pour une fonction paire, $b_n = 0$ et $a_n = 4/T \int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.

### Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance initiale f(0), exprimée en centimètres, de la vitesse initiale f'(0), qui est négative.
- Dans l'algorithme, respecter l'ordre des mises à jour et tester la condition avec la valeur courante de t.
- Pour les coefficients de Fourier, utiliser la période et la parité de la fonction dans les formules.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à $F^2$, car P approche le carré de la valeur efficace.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment trouver la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?**

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$, dont les racines sont -1 et -4. La solution générale est donc une combinaison linéaire de $e^{-t}$ et $e^{-4t}$, avec deux constantes à déterminer.

**Q : Comment utiliser la parité pour calculer les coefficients de Fourier ?**

Une fonction paire a des coefficients sinus nuls, car le produit de la fonction par le sinus est impair sur un intervalle symétrique. Pour les coefficients cosinus, on intègre sur une moitié de période avec la formule adaptée du formulaire.

**Q : Comment gérer les deux exercices pendant les deux heures ?**

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de l'exercice 1 peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, gardez une marge pour vérifier les calculs et respectez les arrondis demandés.

**Q : Quelles règles de présentation et de notation faut-il surveiller ?**

Justifiez les démonstrations et conclusions demandées, notamment pour les limites, les variations et l'interprétation de l'algorithme. Pour le choix multiple sur l'erreur, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://coursbtspi.fr/assets/annales/bts-pi/E2 - Mathématiques/2023/BTS PI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
**Ressources BTS Professions Immobilières :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.